Correction de Série n° 2

– Espace Vectoriels Normés –

Exercice 1

Dites si les propositions suivantes sont vraies ou fausses avec la justificatin:

1· Si (E, N) est un espace vectoriel normé, $x \in E, r > 0$, et $B(x, r)$ est la boule de centre x et de rayon $r > 0$, alors pour tout $\lambda > 0, \quad \lambda B(x, r) = B(x, \lambda r)$.

2· $N : (x, y) \longmapsto |5x + 3y|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

3· Soit $E = \mathbb{R}_1[x]$, Alors $N : P \longmapsto |P(0)| + |P(1)|$ est une norme sur E.

4· Si N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes sur E, et si on note $B_1 = \{x \in E, N_1 \leq 1\}$ et $B_1 = \{x \in E, N_2 \leq 1\}$, alors il existe $a, b > 0$ tels que $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$.

5· Soit (U_n) une suite de l'espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ et soit $\ell \in E$. Alors (U_n) converge vers ℓ si et seulement si $(\|U_n - \ell)$ tend vers 0.

correction 1

1· faux. car $\lambda B(x, r) = B(\lambda x, \lambda r)$.

2· faux. car $N(x, y) = 0 \not\Rightarrow x = y = 0$ (si $x = -3$ et $y = 5$ alors $N(x, y) = 0$).

3· Vrai. car $N(p) = 0 \Rightarrow p = 0$ car $p \in \mathbb{R}_1[x]$.

4· Vrai car Si N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes sur E et si on note $B_1 = \{x \in E, N_1 \leq 1\}$ et $B_1 = \{x \in E, N_2 \leq 1\}$.
Alors $\exists \alpha, \beta$ sont St. positif tel que $\alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1$.

Si $x \in B_2$ Alors $N_2(x) \leq 1 \Rightarrow N_1(x) \leq \frac{1}{\alpha} \Rightarrow x \in \frac{1}{\alpha} B_1$
D'ou on pose que $b = \frac{1}{\alpha}$ alors $B_2 \subset bB_1$.
l'autre inclusion se montre de façon similaire.

5· Vrai car c'est une conséquence facile de la définition de la convergence d'une suite.

Exercice 2

Soit $(E, \|.\|)$ une espace vectoriel normé.
1°) Démontrer que, pour tous $x, y \in E$, On a.

$$\|x\| + \|y\| \leq \|x + y\| + \|x - y\|$$

En déduire que

$$\|x\| + \|y\| \leq 2 \max(\|x + y\|, \|x - y\|)$$

2°) On suppose désormais que la norme est issue d'un produit Scalaire, Démontrer que, pour tous $x, y \in E$, On a

$$(\|x\| + \|y\|)^2 \leq \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$$

En déduire que

$$(\|x\| + \|y\|)^2 \leq \sqrt{2} \max(\|x + y\|, \|x - y\|)$$

correction 2

Soit $(E, \|.\|)$ une espace vectoriel normé.
1°) Soit $x, y \in E$, On écrit.

$x = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y)$ et $y = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(y-x)$
de sorte que , par l'inigalité triangulaire.

$$\|x\| \leq \frac{1}{2}(\|(x+y)\| + \|(x-y)\|)$$

et

$$\|y\| \leq \frac{1}{2}(\|(x+y)\| + \|(x-y)\|)$$

D'ou

$$\|x\| + \|y\| \leq \|(x+y)\| + \|(x-y)\|$$

Puisque:

$$\|(x+y)\| \leq \max(\|(x+y)\|, \|(x-y)\|)$$

et

$$\|(x-y)\| \leq \max(\|(x+y)\|, \|(x-y)\|)$$

D'ou

$$\|x+y\| + \|x-y\| \leq 2\max(\|(x+y)\|, \|(x-y)\|)$$

En déduire que

$$\|x\| + \|y\| \leq 2\max(\|(x+y)\|, \|(x-y)\|)$$

1°)
Soit $< .,. >$ le produit Scalaire dont est issu la norme. Alors

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 < x, y >$$

et

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 < x, y >$$

d'où

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 \geq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$$

Donc

$$(\|x\| + \|y\|)^2 \leq \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$$

Puisque

$$\|x+y\|^2 \leq \max(\|x+y\|^2, \|x-y\|^2)$$

et

$$\|x-y\|^2 \leq \max(\|x+y\|^2, \|x-y\|^2)$$

Alors

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \leq 2\max(\|x+y\|^2, \|x-y\|^2)$$

D'où

$$(\|x\| + \|y\|)^2 \leq 2\max(\|x+y\|^2, \|x-y\|^2)$$

Donc

$$\|x\| + \|y\| \leq \sqrt{2}\max(\|x+y\|^2, \|x-y\|^2)$$

Exercice 3
Dans $E = \mathbb{R}^n$ Montrer que $\|.\|_1, \quad \|.\|_2 \quad et \quad \|.\|_\infty$ des normes deus à deux équivalentes.

correction 3

• Pour tout $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$
Alors
$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x\|_\infty = n\|x\|_\infty$$

D'autre part, si i_0 est indice tel que $\|x\|_\infty = |x_{i_0}|$ alors
$$\|x\|_\infty = |x_{i_0}| \leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_n| = \|x\|_1$$

Donc
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$$
ce ci montre que $\|x\|_\infty$ et $\|x\|_1$ sont deux normes équivalentes.

• Pour tout $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$
Alors
$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i^2|} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|x\|_\infty^2} = \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

D'autre part, si i_0 est indice tel que $\|x\|_\infty = |x_{i_0}|$ alors
$$\|x\|_\infty = \sqrt{|x_{i_0}^2|} \leq \sqrt{|x_1^2| + |x_2^2| + ... + |x_n^2|} = \|x\|_2$$

Donc
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$
ce ci montre que $\|x\|_\infty$ et $\|x\|_2$ sont deux normes équivalentes.

• Par transivité, on en déduit que $\|x\|_2$ et $\|x\|_1$ sont deux normes équivalentes.

Rq: on peut obtenir directement des inégalités entre $\|x\|_2$ et $\|x\|_1$ sans passer par $\|x\|_\infty$ pour $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ l'inégalité de Cauchy-Schwartz fournuit
$$\|x\|_1 = 1 \times |x_1| + ... + 1 \times |x_n| \leq \sqrt{1^2 + ... + 1^2}\sqrt{|x_1|^2 + ... + |x_n|^2} = \sqrt{n}\|x\|_2$$
D'autre part
$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i^2|} \leq \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq n} |x_i||x_j|} = \sqrt{(\sum_{i=1}^{n} |x_i|)^2} = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|x\|_1$$

Donc
$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$$
ce ci montre que $\|x\|_1$ et $\|x\|_2$ sont deux normes équivalentes.

Exercice 4 (Proposition dans le cours).
L'espace vectoriel $\mathbb{R}$ muni de la norme euclidienne est un espace vectoriel normé complet.

correction 4
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$. Alors nous avons vu que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $\mathbb{R}$. D'après la propriété de Bolzano-Weierstrass:(de toute suite bornée de réels, on peut extraire une sous-suite convergente).

on peut extraire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente dans $\mathbb{R}$. Par conséquent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$. Or, toute suite de Cauchy possédant une valeur d'adhérence converge. On en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et donc, $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel normé complet.

Exercice 5

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ dans valeurs $\mathbb{R}$, on définit $f \in E$.

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|, x \in [0,1]\} \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$$

1°) Vérifier que $\|f\|_\infty$, et $\|f\|_1$ sont deux normes sur E.

2°)Montere que pour tout $f \in E$, $\quad \|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$

En utilisant la suite de fonctions $f_n(x) = x^n$, pouver que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

correction 5

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ dans valeurs $\mathbb{R}$, on définit $f \in E$.

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|, x \in [0,1]\} \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$$

1°)

- pour $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|, x \in [0,1]\}$

Remarquons d'abord qu'une fonction continue sur $[0,1]$ est bornnée. ceci justifie que $\|f\|_\infty$ est bien définie. Pour tout $f \in E$. De plus, on a toujours $\|f\|_\infty \geq 0$.
D'autre part, Si $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|, x \in [0,1]\} = 0$, alors pour tout x dans $[0,1]$, $f(x) = 0$, et donc $f = 0$

• Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et f dans E. Pour tout x de $[0,1]$, on a

$$|\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)|$$

et passant au max,

$$\|\lambda f(x)\|_\infty = |\lambda|\|f(x)\|_\infty$$

• Etudions l'inégalité triangulaire.
Soient f et g deux éléments de E, Pour tout x de $[0,1]$
On a

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$$

Passant au max, on obtient

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

finallement $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|, x \in [0,1]\}$ est une norme sur E.

- Pour $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$

• on a $\|f\|_1 \geq 0$.

• Rappelons que l'intégrale d'une fonction continue positive est nulle si et seulement si , il s'agit de la fonction nulle.

Rappelons d'autre part que si f est continue, alors $|f|$ est continue.
on a donc démontre que $\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

• D'autre part $\forall x \in [0,1]$

$$\int_0^1 |\lambda f(x)|dx = |\lambda| \int_0^1 |f(x)|dx$$

donc

$$\|\lambda f\|_1 = |\lambda|\|f\|_1$$

• pour tout $x \in [0,1]$

on a

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$$

d'où
$$\int_0^1 |f(x)+g(x)|dx \le \int_0^1 |f(x)|dx + \int_0^1 |g(x)|dx$$
alors
$$\|f+g\|_1 \le \|f\|_1 + \|g\|_1 \qquad \text{inégalité triangulaire}$$

Donc $\|.\|_1$ est une norme.
2°)
• Remarquons que pour chaque x de $[0,1]$, on a
$$|f(x)| \le \|f(x)\|_\infty$$
on intégre cette inégalité entre 0 et 1, on trouve
$$\|f\|_1 \le \int_0^1 \|f\|_\infty dx = \|f\|_\infty$$

• Pour $f_n(x) = x^n$, on a $\|f(x)\|_\infty = 1$ et $\|f(x)\|_1 = \frac{1}{n+1}$.

si les normes étaient équivalentes, il existe une constante $k > 0$ tel que $\|f\|_\infty \le k\|f\|_1$, pour $f = f_n$

on obtient
$$\|f_n\|_\infty \le k\|f_n\|_1 \Leftrightarrow 1 \le \frac{k}{n+1} \to 0 \quad \text{pour} n \mapsto +\infty$$
contrduction, alors les deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes. $\square$